

平成17年6月1日  
国立大学入学者選抜研究連絡協議会 第26回大会 セミナー資料

## 調査データのための分析方法

大学入試センター 研究開発部

大津 起夫

## 発表の概要

1. はじめに
2.  $2 \times 2$  表の関連性  
    関連性指標の特徴  
    層別分析の重要性
3. 調査データにおける因果推定の難しさ

# 1. はじめに

## 入試研究に関わるデータの分析

1. 試験成績（テストデータ）に関わる分析
2. 試験に関連する質問紙調査などによって得られるデータの分析

## 2. $2 \times 2$ 表の関連性

表 1. 1973年におけるバークレイ校 大学院  
6 学科への入学志願と合否の結果 (性別)

	実数			率 (%)		
	合格	不合格	合計	合格	不合格	合計
男子	1198	1493	2691	44.5	55.5	100.0
女子	557	1278	1835	30.4	69.6	100.0
合計	1755	2771	4526	38.8	61.2	100.0

*Source:* Freedman et al. (1978) による。これらは人数の多い  
6つの学科についてのもの。大学院全体の受験者数は12,763である  
(Bickel et al., 1975).

## 2 × 2 分割表の関連性

	実数			相対頻度 (率)		
	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	行計	合格	不合格	行計
$X_1 = 1$	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{1+}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{1+}$
$X_1 = 2$	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{2+}$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{2+}$
列計	$n_{+1}$	$n_{+2}$	$N = n_{++}$	$p_{+1}$	$p_{+2}$	1.0

## 独立性

「 $X_1$  と  $X_2$  とが統計的に独立」とは  
列の比率（合格率）が全ての行（性別）で同じで  
あること.

$$\frac{p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{p_{22}}$$

性別と合格率が（少なくとも見かけ上）関係して  
いないことを意味する.

## 2.1 2 × 2 分割表の関連性の指標

### 1. オッズ比 (odds ratio)

$$\alpha = \frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}$$

## 2. 対数オッズ比.

$$\log \alpha = \log \left( \frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}} \right)$$

対数オッズ比の分散は各  $n_{ij}$  が大きい場合に次の式で近似される.

$$\text{Var} \left[ \log \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}} \right] \simeq \frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{22}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}}$$

### 3. 4分点相関係数 (ファイ $\phi$ 係数).

$$\phi = \frac{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}{\sqrt{p_{1+}p_{2+}p_{+1}p_{+2}}}$$

$$X^2 = \sum_{i,j} \frac{(n_{ij} - Np_{i+}p_{+j})^2}{Np_{i+}p_{+j}} = N \times \phi^2$$

$X^2$  統計量は独立性の検定に用いられる.

#### 4. 4分相関係数 (tetrachoric correlation).

2変量正規分布を仮定し, データにあてはまる分布の相関係数 $\rho$ を推定する.

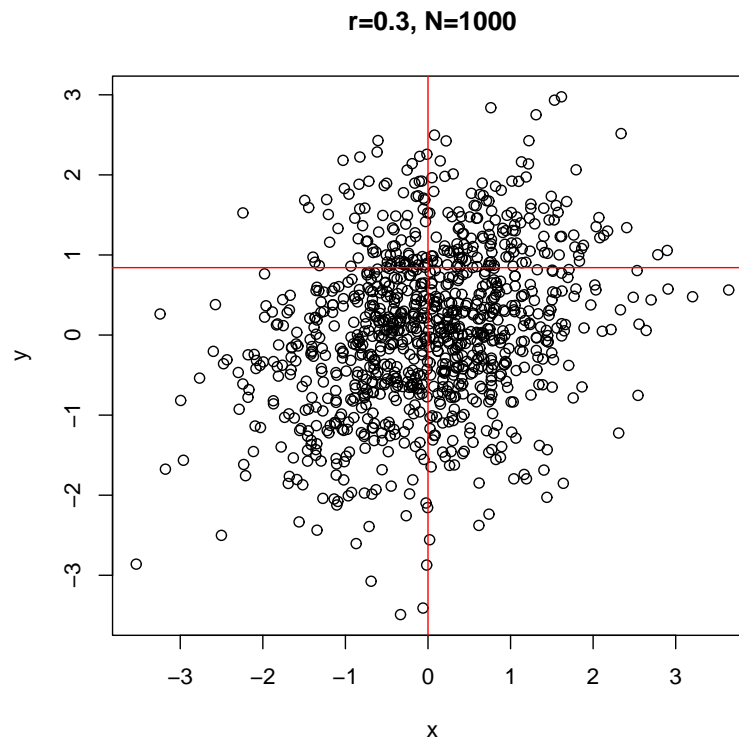


図 1. 2 変量正規分布に基づくデータ例  
(母相関は0.3)

## 表 1 における関連性の指標の値

### 1. オッズ比

$$\frac{1198 \times 1278}{557 \times 1493} = 1.84$$

値の範囲はゼロから無限大まで。性別と合格率が独立なら 1。

## 2. 対数オッズ比

$$\log \frac{1198 \times 1278}{557 \times 1493} = 0.610$$

求められた値の標準偏差は約0.064. 値の範囲は、負の無限大から正の無限大までどの値も取りうる. 性別と合格率が独立ならゼロ.

### 3. 4 分点相関係数（ファイ係数 $\phi$ ）

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1198 \times 1278 - 557 \times 1493}{\sqrt{(1198 + 557)(1493 + 1278)(1198 + 1493)(557 + 1278)}} \\ &= 0.1427\end{aligned}$$

− 1 から + 1 の範囲の値をとる.

カイ 2 乗統計量  $X^2$  は

$$X^2 = \phi^2 \times N = 0.1427^2 \times 4526 = 92.21$$

(高度に有意)

## 4. 4分相関係数

専用のソフトウェアを用いた反復計算により推定すると、次の値が得られる。

$$r_{tetra} = 0.230$$

## 2.2 関連性指標の特徴

表 2. 合格者を4分の1にした仮想例

	実数			率 (%)		
	合格	不合格	合計	合格	不合格	合計
男子	299	1493	1792	16.7	83.3	100.0
女子	139	1278	1417	9.8	90.2	100.0
合計	438	2771	3209	0.136	0.864	100.0

表 3. 合格者が4分の1の場合の  
関連性の指標（仮想例）

指標	変更後	変更前
1 オッズ比	1.84	1.84
2 対数オッズ比	0.610	0.610
3 4分点相関係数（ファイ係数）	0.099	0.1427
4 4分相関係数	0.200	0.230

表 4. 相関係数とオッズ比（抜粋）

母相関	周辺確率	同時確率	4分点 相関係数	オッズ比	対数 オッズ比
$\rho$	$(p_{1+}, p_{+1})$	$(p_{11})$	$\phi$	$\alpha$	$\log \alpha$
<b>0.3</b>	<b>(0.50, 0.50)</b>	<b>0.2985</b>	<b>0.194</b>	<b>2.19</b>	<b>0.79</b>
	<b>(0.50, 0.80)</b>	<b>0.4336</b>	<b>0.168</b>	<b>2.38</b>	<b>0.87</b>
	<b>(0.50, 0.95)</b>	<b>0.4870</b>	<b>0.110</b>	<b>3.00</b>	<b>1.10</b>

周辺度数の偏り  $\Rightarrow$  4分点相関係数  $\phi$  の大小

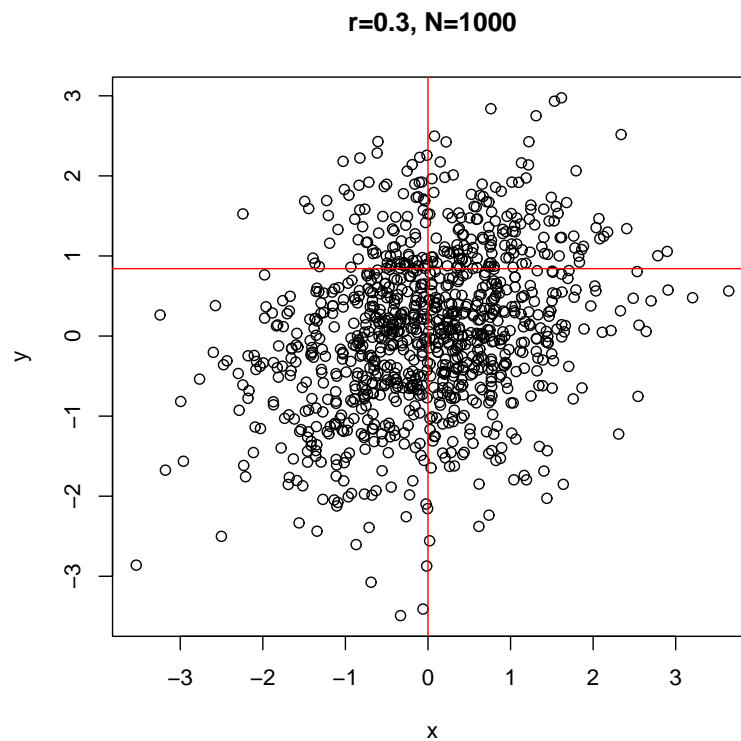


図 1. 2 変量正規分布に基づくデータ例  
(母相関は0.3)

## 2.3 シンプソンのパラドックスと層別の分析

全体の集計結果における関連性の傾向と層別での傾向とが逆になることがある。

表5. 学科別・性別の合否の結果

性別	合否	学科						合計
		A	B	C	D	E	F	
男子	合格	512	353	120	138	53	22	1198
	不合格	313	207	205	279	138	351	1493
女子	合格	89	17	202	131	94	24	557
	不合格	19	8	391	244	299	317	1278
合計		933	585	918	792	584	714	4526
オッズ比		0.35	0.80	1.13	0.92	1.22	0.83	1.84
$\phi$		-0.14	-0.02	0.03	-0.02	0.04	-0.02	0.61
$X^2$		17.25	0.25	0.75	0.30	1.00	0.38	92.20
$(p$ 値)		0.00	0.61	0.39	0.59	0.32	0.54	0.00

Source: Freedman et al. (1978). オッズ比が1より大きい ( $\phi$ がゼロより大きい) ことは, 男子の合格率が女子より大きいことを示す.

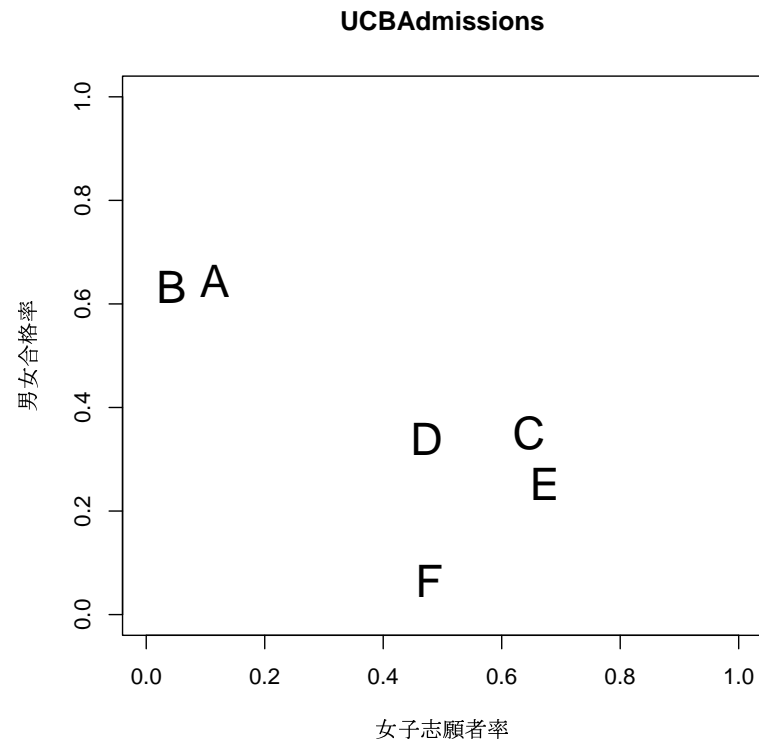


図 2. 学科別の女子志願者率と合格率  
(男女込み)

### 学科別・性別の合格率・不合格率

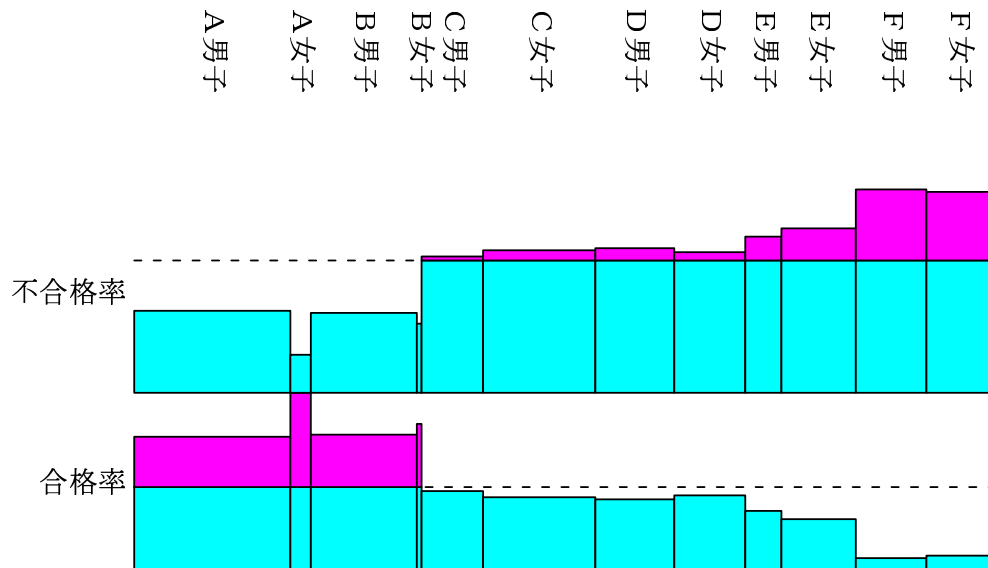


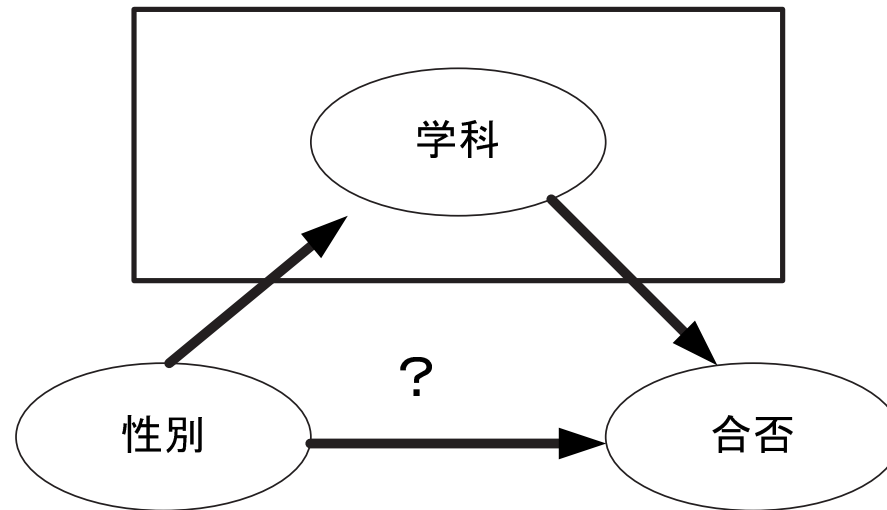
図 3. 重み付きマトリックス表示

### 3. 調査データにおける因果推論の難しさ

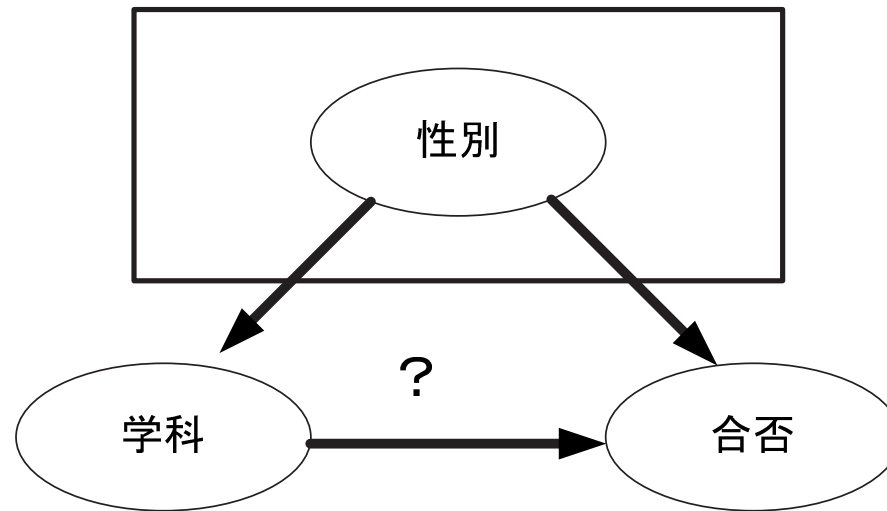
#### 3.1 多くの層に対応する推定法

1. コクラン・マンテル・ヘンツェル検定  
層別の  $2 \times 2$  表の検定
2. 対数線形モデル  
汎用的なモデル（最尤法，条件付最尤法）

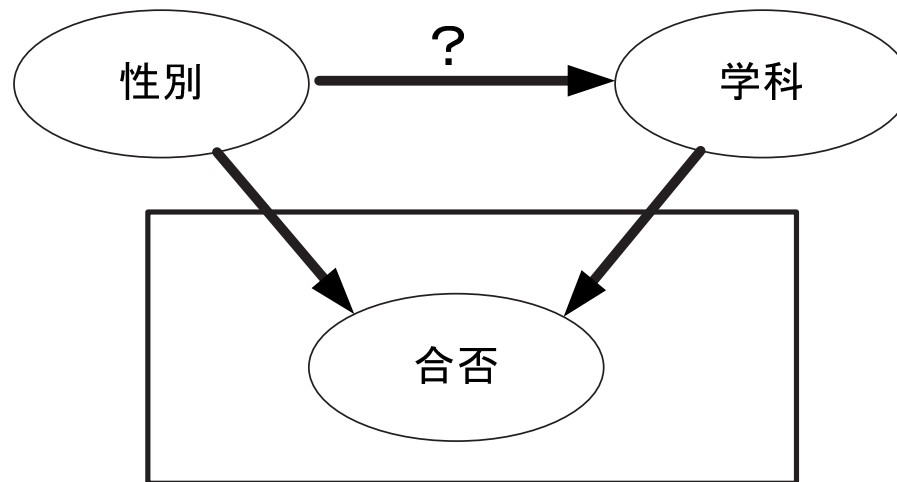
## 3.2 影響関係の方向



(i) 学科による層別（適切）



(ii) 性別による層別 (適切)



(iii) 合否による層別（不適切）

### 3.3 未知の背景要因の影響

Smith et al. (1992) *Lancet*

疾病リスクの長期にわたる追跡研究(MRFIT)  
の分析

喫煙と自殺率との間に（見かけ上）関連性がある。

喫煙と他殺による死の間にも関連性がある。???

表 6. 喫煙行動と自殺率  
(Smith et al.,1992)

タバコ/日	人数	自殺件数	$\frac{\text{自殺件数}}{1 \text{ 万人} \times \text{年}}$
0	228,545	291	1.09
1-19	29,333	50	1.47
20-39	72,200	166	2.00
40-59	27,844	78	2.46
60+	3,740	16	3.78

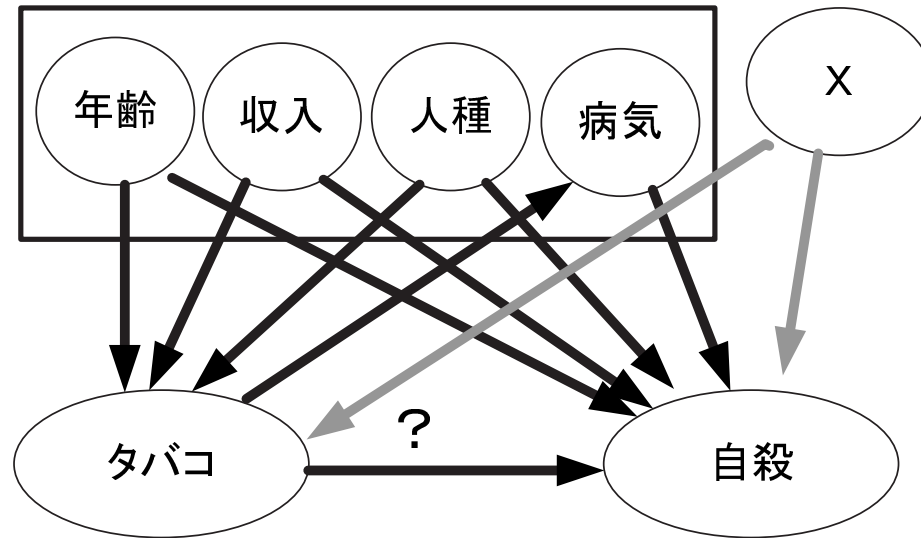


図5. 喫煙の影響構造

表 7. リスク要因と自殺の相対リスク  
(95% 信頼区間) (Smith et al. 1992)

リスク要因	年齢補正済み 相対リスク	完全補正済み 相対リスク
喫煙		
0	1.00	1.00
1-19	1.36(1.00-1.83)	1.36(1.00-1.84)
20-39	1.88 (1.55-2.27)	1.86(1.54-2.26)
40-59	2.31 (1.79-2.96)	2.27(1.77-2.92)
60+	3.44 (2.08-5.69)	3.33(2.01-5.52)
( $\chi^2$ for trend)	(78.66, $p < 0.0001$ )	(75.98, $p < 0.0001$ )
収入		
低	1.35(1.13-1.60)	1.33(1.13-1.59)
他	1.00	1.00

表 8. タバコと他殺による死  
 総数 222, 人種と収入 (居住地域から推定) に  
 ついて補正された 10 万人あたり死亡率の比

リスク要因 (一日あたり喫煙本数)	他殺による死亡の相対比率 (95% 信頼区間)
0	1.00
1-39	1.71 (1.29-2.28)
40-	2.04 (1.32-3.15)

## まとめ

1. 層別の重要性
2. 4分点相関係数（ファイ係数）の特性
3. 影響の向きと層別の可否
4. 未知の背景要因への注意